JIPM (Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika) 10(2), 2022, 284-298
DOI : 10.25273/jipm.v10i2.8903

JIPM (Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika)

Journal homepage: http://e-journal.unipma.ac.id/index.php/jipm

Argumentasi Siswa Dalam Pembuktian Konjektur

Intan Carolina Savitri*, Toto Nusantara, Swasono Rahardjo
Universitas Negeri Malang, Indonesia
*intancarol97@gmail.com

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan struktur argumentasi siswa dalam pembuktian konjektur berdasarkan jenis bukti yang diberikan. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif. Subjek pada penelitian adalah 8 orang siswa kelas XI SMAN 1 Rogojampi yang dipilih berdasarkan jenis bukti yang diberikan. Subjek terdiri dari 6 subjek dengan pembuktian menggunakan contoh, satu subjek dengan pembuktian yang menggabungkan penggunaan contoh dan bukti formal, dan satu subjek dengan pembuktian formal. Subjek diminta membuktikan konjektur kemudian dikelompokan berdasarkan hasil pembuktian. Kemudian setiap subjek diwawancara untuk mengetahui argumentasinya. Hasil wawancara dianalisis berdasarkan struktur argumentasi Toulmin. Hasil penelitian menunjukan bahwa struktur argumentasi siswa yang menghasilkan pembuktian dengan contoh generik hampir sama dengan siswa yang menghasilkan pembuktian dengan contoh empirik. Struktur argumentasi siswa yang membuktikan dengan contoh lebih rumit dan memuat lebih banyak jenis komponen argumentasi dibanding siswa yang membuktikan secara formal.

Kata kunci: Pembuktian, Argumentasi, Contoh generic, Contoh empirik.

Abstract: *This study aims to describe the structure of students' argumentation in proving of conjecture based on the type of proof provided. This research uses qualitative descriptive method. The Subjects were 8 in grade 11th of SMAN 1 Rogojampi who were selected based on the type of evidence provided. Subjects consist of 6 subjects with proof based on examples, one subject with proof that combines the use of examples and formal evidence, and one subject with formal proof.Subjects were asked to prove a conjecture. Then they were grouped based on the results of their written proof. Each subject will be interviewed to find out their argumentations. The results of the interview will be analyzed based on Toulmin's argumentation structure. This study showed that the argumentation structure of students who produced proof with generic examples was similar with those who produced proof with empirical examples. The argumentation structure of students who prove by example is more complicated and contains more types of argumentation components than students who prove formally.*

Keywords*: Prove, Argumentation, Generic Example, Empiric Example*

Pendahuluan

Pembuktian adalah salah satu standar proses pembelajaran matematika yang harus dikuasai oleh siswa. Pembuktian adalah proses yang didasarkan pada sekelompok kebiasaan mental seperti menentukan struktur dan variabel, mendefinisikan hipotesis dan mengorganisir argumen logis (Uğurel et al., 2016). Pembuktian berfungsi untuk menetapkan kebenaran pernyataan matematika (Tall & Mejia-Ramos, 2010). Konjektur merupakan pernyataan matematika yang perlu dibuktikan karena nilai kebenarannya belum diketahui namun memiliki potensi untuk benar (Pedemonte, 2001; Chartrand, Polimeni, & Zhang, 2018). Pada penelitian ini, konjektur didefinisikan sebagai penyataan matematika yang nilai kebenarannya belum diketahui oleh siswa dan harus dibuktikan lebih lanjut sesuai dugaan kebenaran pernyataan yang diprediksi oleh siswa.

Metode pembuktian dibagi menjadi dua berdasarkan penalaran yang digunakan yaitu deduktif dan induktif (Siswono et al., 2020). Penalaran deduktif merupakan proses membuat kesimpulan dari informasi yang diketahui berdasarkan aturan logika (Ayalon & Even, 2008). Pembuktian dengan metode deduktif atau disebut juga sebagai pembuktian formal adalah pembuktian yang setiap kesimpulan yang dihasilkan telah diperiksa dengan aksioma dasar matematika (Hales, 2008). Pembuktian formal dapat disimpulkan sebagai pengujian pernyataan berdasarkan logika formal matematika yang terdiri atas aksioma-aksioma. Sementara penalaran induktif merupakan proses penalaran berdasarkan observasi tertentu untuk mencapai suatu kesimpulan umum (Christou & Papageorgiou, 2007). Pembuktian dengan menganalisis contoh-contoh merupakan salah satu jenis pembuktian induktif. Contoh adalah objek matematika yang memenuhi definisi dari suatu kelas objek yang memiliki kriteria-kriteria khusus (Watson & Mason, 2005; Alcock & Weber, 2010; Mills, 2014)

Contoh dibagi menjadi dua menurut cara penggunaannya dalam pembuktian yaitu contoh empirik dan contoh generik. Contoh empirik adalah contoh yang spesifik dan digunakan untuk memahami, mengecek, dan memverifikasi konjektur tanpa memperdulikan keumuman contoh (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2017). Sementara contoh generik adalah contoh yang berusaha menyoroti sifat umum daripada sifat khusus dari suatu contoh dan digunakan untuk menunjukan validitas pernyataan, atau sebagai bukti yang valid (Mason & Pimm, 1984; Rø & Arnesen, 2020). Pembuktian dengan contoh generik akan disebut sebagai pembuktian generik, sementara pembuktian dengan contoh empirik akan disebut sebagai pembuktian empirik (Leron & Zaslavsky, 2013). Meskipun sama-sama menyajikan keumuman, bukti generik tidak sama dengan bukti formal, tetapi berfungsi sebagai bahan bagi seseorang untuk menyusun bukti formal (Yopp, Ely & Johnson-Leung, 2015). Hal yang membedakan bukti formal dengan bukti generik adalah bukti formal sering menggunakan representasi umum, seperti variabel atau simbol, sedangkan bukti generik menilai keumuman tidak pada representasi tetapi pada cara contoh itu diuraikan (Yopp & Ely, 2016).

Bukti dari suatu pernyataan adalah hal yang penting untuk dibuat atau ditemukan dari suatu pernyataan. Argumentasi dan pembuktian dikembangkan ketika seseorang ingin mengetahui atau menyakini kebenaran suatu pernyataan (Lakatos, 1976; de Villiers, 1990; Chazan, 1993; Healy & Hoyles, 2000). Argumentasi dan pembuktian dapat dianggap sebagai pembenaran rasional (Bettina Pedemonte, 2007). Umumnya pembuktian terdiri dari argumen non-singular yang membentuk struktur argumentasi dan digunakan untuk meyakinkan orang lain terkait suatu kesimpulan (Aberdein, 2012). Hal ini menunjukkan bahwa argumentasi merupakan bagian dari proses pembuktian suatu pernyataan.

Struktur Argumentasi Toulmin telah digunakan untuk menganalisis proses membangun bukti (Knipping, 2004; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007; Pedemonte, 2007). Pada skema Toulmin, suatu argumentasi disusun oleh enam komponen dasar yaitu *data, claim, warrant, backing, qualifier,* dan *rebuttal* (Erduran, Simon & Osborne, 2004; Clark *et al.*, 2007; Conner *et al.*, 2014; Laamena *et al.*, 2018; Kosko & Zimmerman, 2019; Rø & Arnesen, 2020). *Data* merupakan dukungan atau fondasi yang disediakan untuk *claim* (Erduran, Simon & Osborne, 2004; Clark *et al.*, 2007; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007**;** Conner *et al.*, 2014**;** Laamena *et al.*, 2018; Rø & Arnesen, 2020). *Claim* berupa pernyataan yang validitasnya sedang dicari (Conner et al., 2014) berdasarkan data (Laamena et al., 2018). *Warrant* adalah pembenaran hubungan antara *data* dan *claim* (Conner *et al.*, 2014**;** Pedemonte, 2007; Rø & Arnesen, 2020; Laamena *et al.*, 2018**).** *Backing* adalah alasan lebih lanjut untuk mempercayai *warrant* (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007; Kosko & Zimmerman, 2019; Rø & Arnesen, 2020). *Qualifier* berupa kata-kata yang mengiringi *claim* untuk menunjukkan derajat kepercayaan terhadap *claim* tersebut (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007**;** Hakyolu & Ogan-Bekiroglu, 2016; Laamena *et al.*, 2018). *Rebuttal* merupakan pernyataan yang berpotensi menyangkal *claim* dengan menunjukan kondisi saat *claim* tidak berlaku (Erduran, Simon & Osborne, 2004; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007**;** Hakyolu & Ogan-Bekiroglu, 2016**).** *Rebuttal* dapat bertentangan dengan *data*, *warrant*, atau *backing* (Clark *et al.* 2007).

Terdapat banyak penelitian terdahulu yang membahas mengenai argumentasi. Beberapa mengkaji tentang cara meningkatkan argumentasi siswa. Seperti halnya penelitian yang dilakukan oleh Muhtadi et al. (2020) yang mengkaji tentang teknik *Guide-redirecting Warrant Construction* (GWC) untuk meningkatkan argumentasi siswa. Penelitian terdahulu juga telah mengkaji tentang peran masing-masing komponen argumentasi dalam penyusunan argumentasi. Seperti penelitian Inglis et al. (2007) mengkaji tentang peran *qualifier* dalam penyusunan argumen. Sementara penelitian Tchonang et al. (2019) mengkaji tentang peran gambar dalam penyusunan argumen pembuktian. Terdapat pula penelitian yang mengkaji argumentasi ditinjau dari berbagai faktor. Indrawati & Febrilia (2019) telah mengkaji argumentasi berdasarkan tingkat kemampuan matematis siswa. Terdapat pula penelitian yang mengaitkan tentang contoh dan argumentasi. Laamena et al. (2018) telah mengkaji tentang bagaimana contoh digunakan dalam argumentasi dan pembuktian. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa contoh berperan sebagai *exploratory tool*, *investigative tool,* dan *conviction tool.* Rø & Arnesen (2020) melakukan penelitian yang bertujuan untuk menganalisis struktur argumen yang dihasilkan siswa ketika menggunakan contoh generik dalam pembuktian, Jenis argumen yang dihasilkan siswa adalah , empirical arguments, leap arguments, embedded arguments, and other arguments.

Penelitian terdahulu belum ada yang memkaji tentang argumentasi pada pembuktian jika dilihat berdasarkan jenis pembuktian yang dihasilkan siswa, yaitu pembuktian dengan contoh atau pembuktian formal. Oleh sebab itu, penting untuk dilakukan penelitian untuk mengetahui struktur argumentasi yang terbentuk dilihat dari jenis pembuktian yang diberikan. Temuan penelitian ini berguna untuk memberikan wawasan kepada pengajar tentang proses pelajar dalam menyusun argumentasi dari pembuktian suatu konjektur matematika. Sehingga pengajar dapat mengetahui masalah maupun kesalahan dalam proses pembuktian siswa. Selain itu, temuan dalam penelitian ini dapat menjadi bahan bagi pengajar untuk membimbing pebelajar dalam membangun argumentasi yang mengarahkan pada pembuktian yang valid, atau sebagai gambaran yang dapat digunakan untuk mencari ide untuk merekonstruksi argumentasi pebelajar yang kurang valid. Penelitian ini juga memperluas teori terkait pembuktian dan argumentasi.

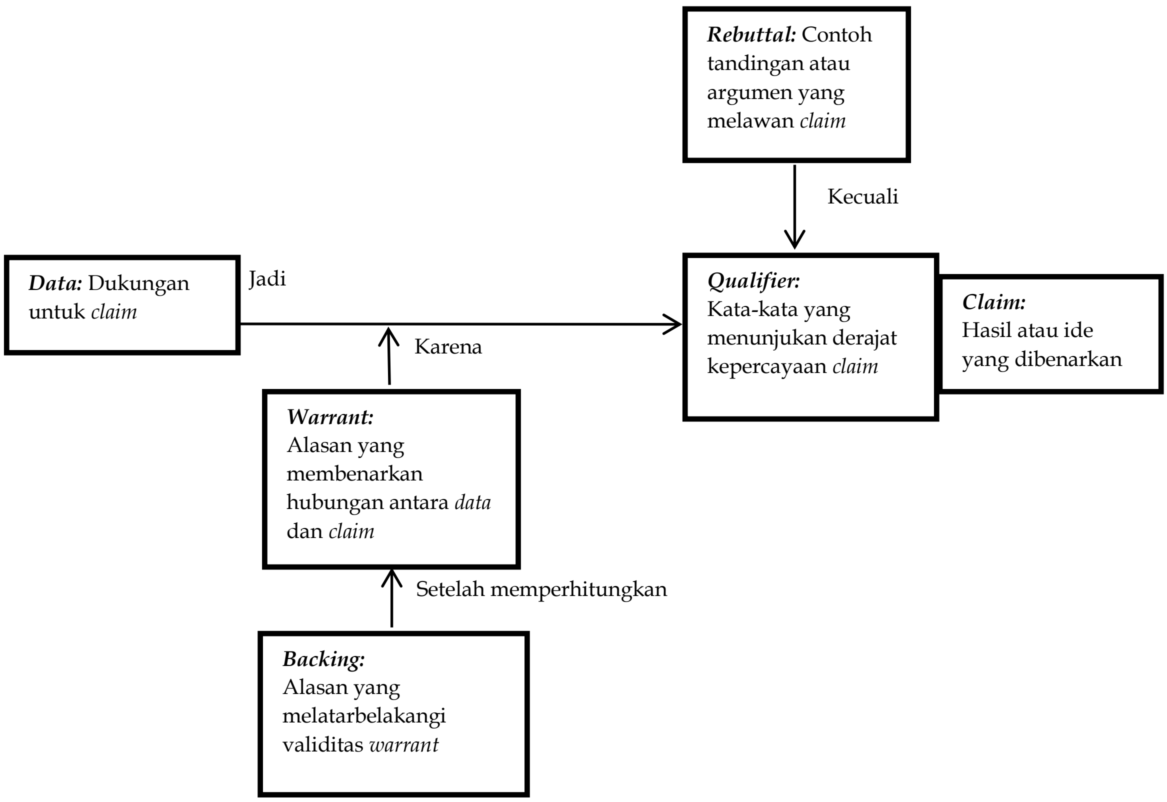
Metode

Jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif. Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan struktur argumentasi siswa dalam pembuktian konjektur berdasarkan jenis bukti yang diberikan.

Penelitian ini dilakukan pada siswa SMAN 1 rogojampi kelas XI yang berjumlah 8 orang. Siswa-siswa tersebut diminta membuktikan kebenaran konjektur 'penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (dengan n adalah bilangan ganjil) selalu habis dibagi n'.

Berdasarkan hasil pengerjaan pembuktian, siswa dikelompokan menjadi dua kelompok yaitu kelompok siswa dengan pembuktian berdasarkan contoh dan kelompok siswa dengan pembuktian formal. Subjek yang menggunakan contoh dalam pembuktian akan digolongkan kembali menjadi subjek dengan contoh generik dan subjek dengan contoh empirik untuk analisis lebih mendalam. Seluruh subjek pada masing-masing kelompok akan diwawancara untuk mengetahui struktur argumentasinya.

Data didapat berdasarkan hasil wawancara subjek terkait pembuktian konjektur yang dihasilkan. Data wawancara akan ditranskrip. Kemudian hasil transkrip wawancara dan hasil pengerjaan tertulis akan direduksi. Data reduksi akan dianalisis struktur argumentasinya berdasarkan struktur argumentasi Toulmin dengan mengidentifikasi setiap komponen argumentasi dan hubungan dari masing-masing komponen. Kemudian hasil analisis akan disajikan dalam bentuk skema berpedoman pada bagan argumentasi Toulmin pada Bagan 1.



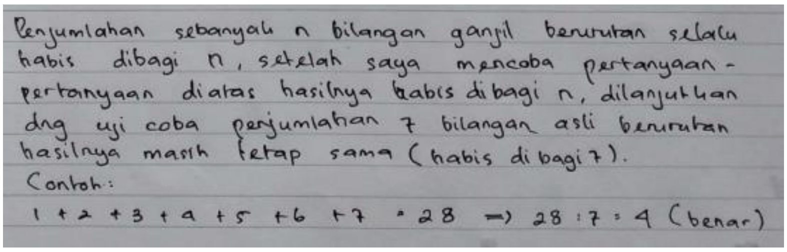
Bagan 1. Skema Argumentasi Toulmin

Hasil dan Pembahasan

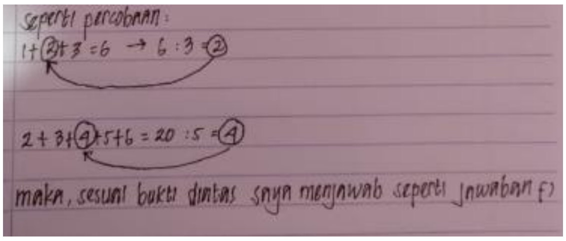
Terdapat delapan siswa yang diambil sebagai subjek penelitian. Tiga siswa membuktikan konjektur dengan contoh generik, tiga siswa membuktikan dengan contoh empirik, satu siswa membuktikan dengan menggabungkan penggunaan contoh dan bukti formal, sementara satu siswa membuktikan dengan bukti formal.

Argumentasi pada Pembuktian dengan Contoh

Argumentasi yang dihasilkan oleh subjek yang membuktikan konjektur 'penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n ganjil) selalu habis dibagi n' dengan pembuktian berdasarkan contoh cenderung memiliki struktur yang sama. *Warrant* yang digunakan untuk menghubungkan *data* dan *claim* berupa pembuktian kebenaran konjektur untuk beberapa bagian kasus dari konjektur utama. Pembuktian pada *warrant* membentuk argumentasi baru yang disusun oleh *data* dan *claim* sesuai bagian kasus yang dibuktikan. Lebih lanjut, *warrant* untuk pembuktian bagian kasus berupa dugaan kebenaran yang dibuat dengan memperhatikan sifat matematis khusus seperti, kelompok bilangan dengan nilai relatif kecil atau besar, dan kelompok bilangan berurutan yang diawali bilangan genap atau ganjil. Sehingga, *backing* yang dibuat berupa perhitungan contoh-contoh berdasarkan sifat-sifat matematis tersebut. Lebih lanjut, terdapat subjek yang menggunakan konsep induksi tidak formal pada contoh sebagai *warrant* dengan *backing* berupa perhitungan pada contoh yang bilangan –bilangannya berurutan misal, 1+2+3 dan 2+3+4).



Gambar 1. Pembuktian dengan Contoh Empirik

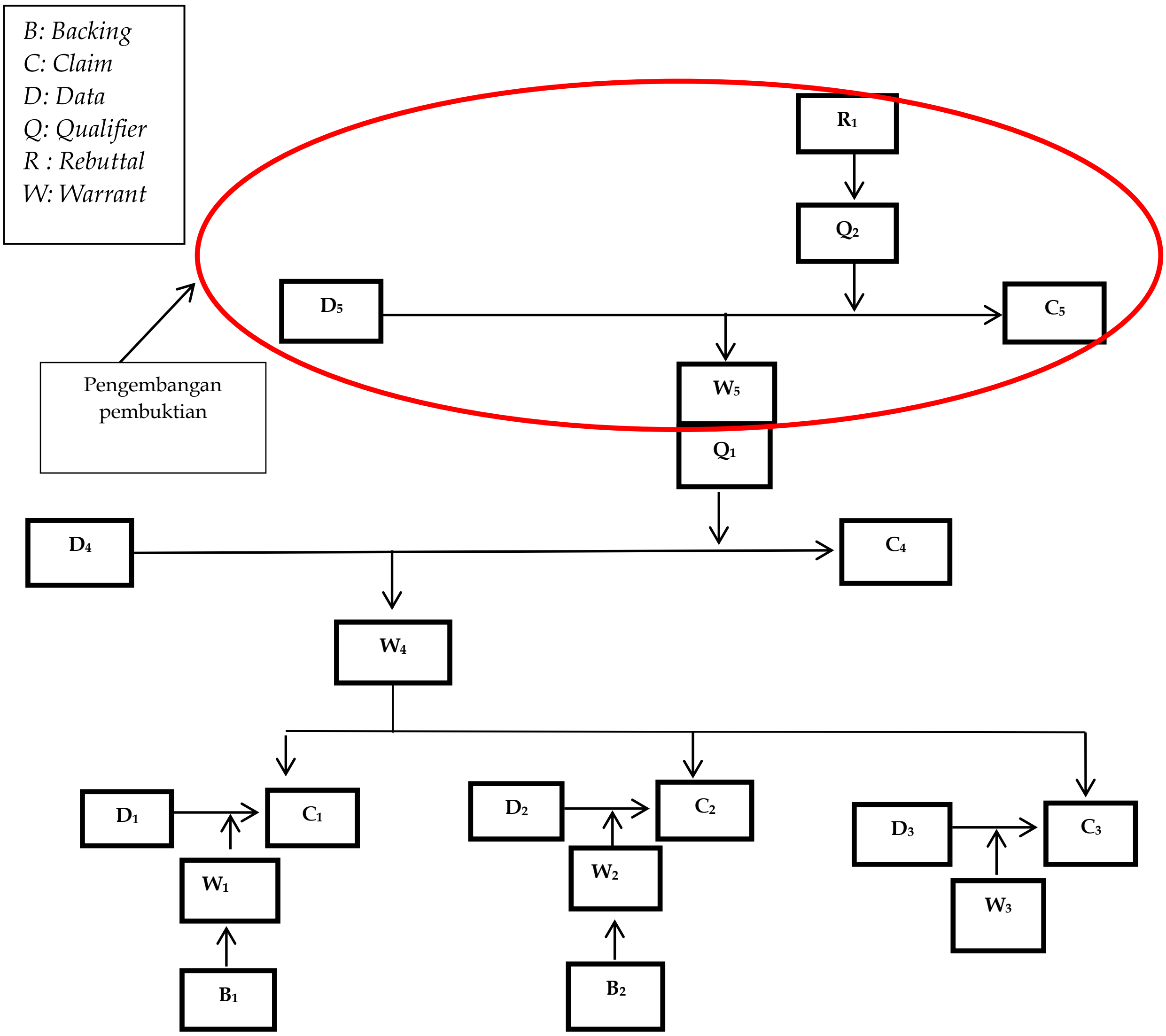


Gambar 2. Pembuktian dengan Contoh Generik

Subjek yang menghasilkan bukti empirik dan generik memunculkan *warrant* yang berbeda dalam pembuktian bagian kasus. *Warrant* yang digunakan oleh subjek dengan contoh empirik cenderung melihat kesesuaian hasil akhir perhitungan pada masing-masing contoh dengan *claim.* Sementara *warrant* yang digunakan subjek generik menunjukan analisis lebih dalam pada contoh-contoh yang dibuat sehingga ditemukan pola umum.

Pada kelompok subjek yang membuktikan konjektur dengan contoh, terdapat satu subjek yang menghasilkan *rebuttal* berupa dugaan adanya penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) yang tidak habis dibagi n. Subjek tersebut merupakan subjek yang menghasilkan bukti generik yang meskipun telah menemukan struktur umum contoh, namun tetap menggantungkan kebenaran konjektur pada hasil perhitungan. Subjek lain pada kelompok pembuktian dengan contoh cenderung menggeneralisasi temuan yang didapat pada masing-masing contoh untuk semua anggota domain konjektur, seperti tampak pada generalisasi dalam Gambar 1.

Terdapat satu subjek dengan pembuktian berdasarkan contoh yang menghasilkan struktur argumentasi sedikit berbeda, yang mana subjek mengembangkan pembuktian konjektur untuk sebarang n bilangan asli. Subjek juga berhasil menemukan *rebuttal* yang menyangkal kebenaran konjektur baru yang dibuat. Argumentasi subjek ini diuraikan lebih lanjut pada Bagan 2 dan Tabel 1.



Bagan 2. Skema Struktur Argumentasi pada Pembuktian dengan Contoh dan Adanya Perluasan Pembuktian

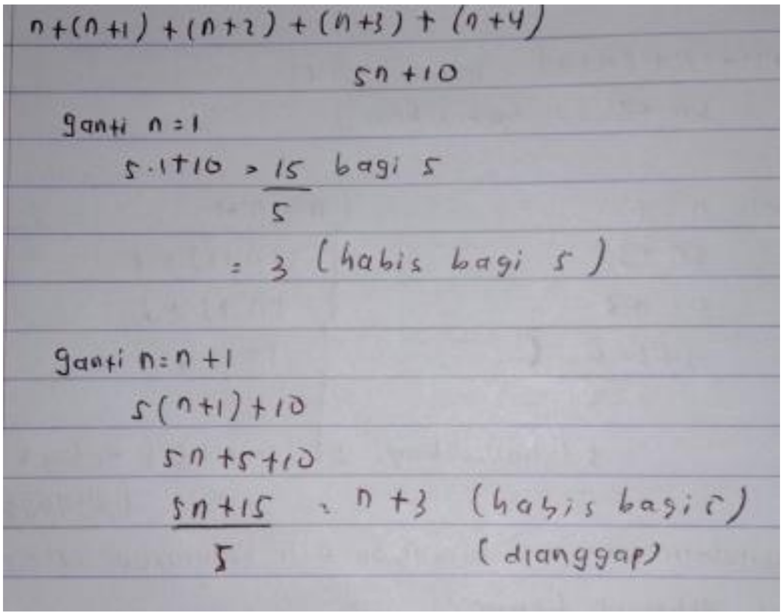
Tabel 1. Analisis Struktur Argumentasi pada Pembuktian dengan Contoh dan Adanya Perluasan Pembuktian

No	Pernyataan	Jenis	Keterangan
1.	Hasil penjumlahan tiga bilangan pada : - Tiga bilangan dengan pola (ganjil, genap, ganjil) - Tiga bilangan dengan pola (genap, ganjil, genap) - bilangan relatif besar belasan atau puluhan	*Warrant 1*	mendukung hubungan *data 1* (penjumlahan tiga bilangan asli berurutan) dengan *claim 1*(penjumlahan tiga bilangan asli beururtan habis dibagi 3)
2.	selalu habis dibagi 3 contoh 1+2+3 (ganjil genap ganjil) , 4+5+6 (genap ganjil	*Backing 1*	Mendukung *warrant1*

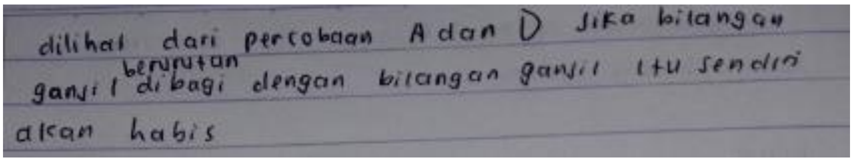
No	Pernyataan	Jenis	Keterangan
	genap), dan 10+11+12 (puluhan)		
3.	Hasil penjumlahan bilangan yang berkelanjutan selalu habis dibagi 5	*Warrant 2*	Mendukung hubungan *data 2* (penjumlahan lima bilangan asli berurutan) dengan *claim 2* (penjumlahan lima bilangan asli beururtan habis dibagi lima)
4.	Penggunaan contoh 1+2+3+4+5, 6+7+8+9+10, 11+12+13+14+15	*Backing 2*	Mendukung *warrant 2*
5.	Penggunaan contoh 60+61+62+63+64+65+66	*Warrant 3*	mendukung hubungan *data 3* (penjumlahan tujuh bilangan asli berurutan) dengan *claim3* (penjumlahan tiga bilangan asli beururtan habis dibagi tujuh)
6.	*claim 1, claim 2, dan claim3*	*Warrant 4*	Mendukung hubungan *data 4* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil)) dengan *claim4* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)
7.	Pasti	*Qualifier 1*	Menyertai *claim 3* penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)
8.	Argumentasi5	*Warrant 5*	Mendukung hubungan *data 5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n) dengan *claim 5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n habis dibagi n)
9.	Ditemukan rebuttal untuk konjektur 'penjumlahan setiap n bilangan asli berurutan selalu habis dibagi n' melalui penggunaan contoh 3+4+5+6 yang tidak habis dibagi 4	*Rebuttal 1*	Melawan hubungan *data 5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n) dengan *claim5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n habis dibagi n)
10.	Tidak selalu	*Qualifier 2*	Menyertai *claim 5* penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n habis dibagi n)

Argumentasi pada Pembuktian Gabungan

Terdapat satu subjek dengan pembuktian yang menggabungkan pembuktian berdasarkan contoh dan pembuktian formal. Argumentasi yang dihasilkan oleh subjek dalam membuktikan konjektur 'penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n ganjil) selalu habis dibagi n' disusun oleh *warrant* berupa pembuktian kebenaran konjektur untuk beberapa bagian kasus. Sehingga pembuktian konjektur tersebut tergolong pembuktian berdasarkan contoh karena kebenaran konjektur utama tidak didasarkan pada bukti umum untuk semua bilangan pada domain konjektur melainkan hanya untuk beberapa bagian kasus. Setiap *warrant* membentuk argumentasi baru yang disusun oleh *data* dan *claim* sesuai bagian kasus yang dibuktikan. Pada bagian ini *warrant* berupa bukti formal yang didukung juga oleh *backing* berupa contoh-contoh. Pembuktian formal yang disajikan subjek ditunjukan dengan digunakannya variabel untuk mewakili sebarang bilangan pada domain konjektur.

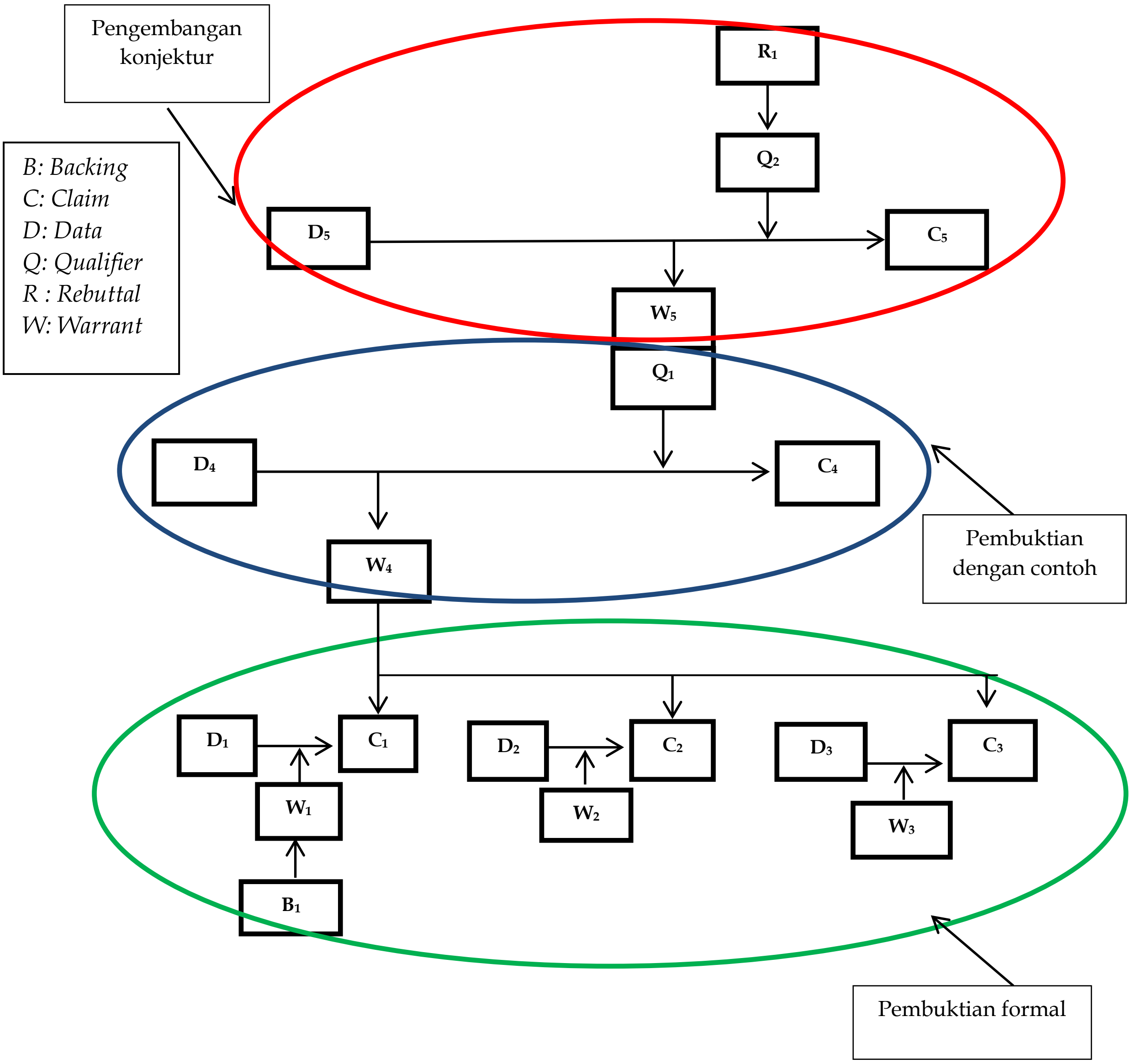


Gambar 3. Pembuktian Formal pada Pembuktian Gabungan



Gambar 4. Pembuktian berdasarkan contoh pada Pembuktian Gabungan

Subjek dengan bukti yang menggabungkan bukti formal dan bukti berdasarkan contoh juga berhasil menggembangkan pembuktian konjektur. Subjek membuktikan 'penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan asli selalu habis dibagi n' dengan memunculkan *rebuttal* berupa contoh pembanding yang menyangkal konjektur tersebut.



Bagan 3. Skema Struktur Argumentasi pada Pembuktian Gabungan

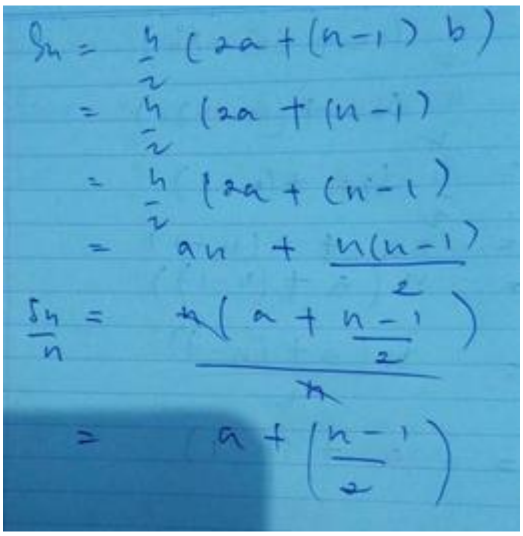
Tabel 2. Analisis Struktur Argumentasi pada Pembuktian Gabungan

No	Pernyataan	Jenis	Keterangan
1.	Penggunaan rumus n+n+1+n+2 dan konsep induksi maematika	*Warrant 1*	mendukung hubungan *data 1* (penjumlahan tiga bilangan asli berurutan) dengan *claim 1*(penjumlahan tiga bilangan asli beurutan habis dibagi 3)
2.	Penggunaan contoh 1+2+3, 2+3+4, 3+4+5	*Backing 1*	Mendukung *warrant 1*
3.	Penggunaan rumus n+n+1+n+2 +n+3+n+4 dan konsep induksi maematika	*Warrant 2*	Mendukung hubungan *data 2* (penjumlahan lima bilangan asli berurutan) dengan *claim 2* (penjumlahan lima bilangan asli berurutan habis dibagi lima)
4.	Penggunaan rumus n+n+1+n+2 +n+3+n+4+n+5+n+6 dan konsep induksi maematika	*Warrant 3*	Mendukung hubungan *data 3* (penjumlahan tujuh bilangan asli berurutan) dengan *claim 3* (penjumlahan tujuh bilangan asli berurutan habis dibagi tujuh)

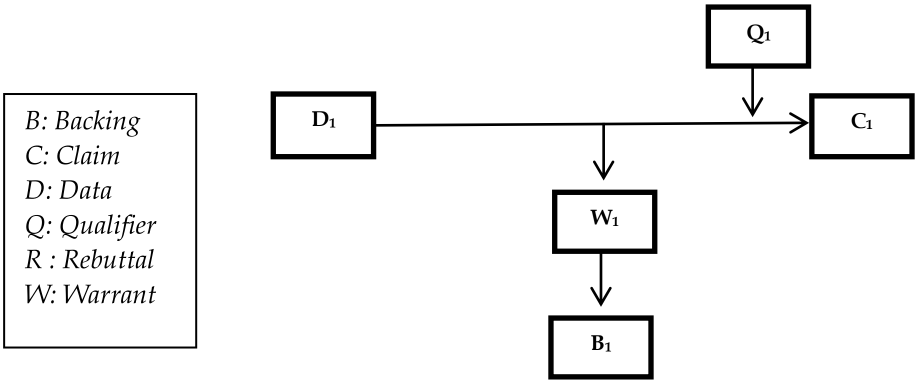
No	Pernyataan	Jenis	Keterangan
5.	*claim 1, claim 2, claim 3.*	*Warrant 4*	Mendukung hubungan *data 4* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil)) dengan *claim 4* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)
6.	pasti	*Qualifier 1*	Menyertai *claim 3* penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)
7.	Argumentasi4	*Warrant 5*	Mendukung hubungan *data 5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n) dengan *claim5*(penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n habis dibagi n)
8.	Penggunaan contoh n+n+1+n+2+n+3+n+4+n+5 yang tidak habis dibagi 6	Rebuttal 1	Menentang hubungan *data 5* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n) dengan *claim 5*(penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n habis dibagi n)
9.	Tidak selalu	*Qualifier 2*	Menyertai *claim 5* penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)

Argumentasi pada Pembuktian Formal

Terdapat satu subjek dengan pembuktian formal. Argumentasi yang dihasilkan oleh subjek dalam membuktikan konjektur 'penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n ganjil) selalu habis dibagi n' disusun oleh satu *warrant* berupa pembuktian konjektur secara umum. Pembuktian formal ditunjukan dengan penggunaan rumus jumlah suku ke-n pada deret aritmatika. *Backing* yang dibuat untuk mendukung *warrant* berupa pernyataan yang menegaskan bahwa hasil perhitungan pada *warrant* sesuai dengan *claim* dengan memanfaatkan informasi pada *data* dan sifat matematis dari bilangan ganjil dan bilangan genap.



Gambar 5. Pembuktian formal



Bagan 4. Skema Struktur Argumentasi pada Pembuktian Formal

Tabel 3. Analisis Struktur Argumentasi pada Pembuktian Formal

No	Pernyataan	Jenis	Keterangan
1.	Menggunakan S_n pada deret aritmatikadengan $U_1 = a$ dan beda 1.	*Warrant 1*	Mendukung hubungan *data 3* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil)) dengan *claim 3* (penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)
2.	$\frac{n-1}{2}$ bulat karena n ganjil mengakibatkan $n-1$ genap dan bilangan genap selalu habis dibagi 2.	*Backing 1*	Mendukung *warrant 1*
3.	Pasti	*Qualifier 1*	Menyertai *claim 3* penjumlahan bilangan asli berurutan sebanyak n (n bilangan ganjil) habis dibagi n)

Pada pembuktian menggunakan contoh baik pembuktian contoh generik dan pembuktian empirik struktur argumentasi yang terbentuk hampir sama. Pembeda argumentasi pada pembuktian generik dan empirik terletak pada perlakuan yang diberikan pada contoh-contoh yang dipilih sebagai *backing*. Pada pembuktian empirik, contoh digunakan hanya sebatas untuk mengecek kesesuai *data* dan *claim* dengan hasil yang diperoleh pada contoh. Sementara pada pembuktian generik, hasil yang didapat pada contoh dianalisis hingga ditemukan pola umum yang dapat memperkuat hubungan antara *data* dan *claim. Warrant* berupa contoh baik generik maupun empirik tergolong sebagai *inductive warrant (*Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007). Pada subjek yang menghasilkan bukti gabungan antara bukti berdasarkan contoh dan bukti formal, *warrant* yang digunakan terdiri dari *inductive warrant* ketika pembuktian didasarkan pada bagain kasus dan *deductive warrant* ketika pembuktian didasarkan pada bukti formal. Sementara pada pembuktian formal *warrant* hanya berupa *deductive warrant* karena berdasarkan pada suatu aturan *(*Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007). Argumentasi yang dihasilkan dengan *inductive warrant* tergolong argumentasi informal dan argumentasi yang dihasilkan dengan *deductive warrant* tergolong argumentasi formal (Laamena *et al*., 2018). Sementara argumentasi subjek dengan bukti gabungan dari bukti dengan contoh dan bukti formal yang memunculkan dengan *inductive warrant* dan *deductive warrant* secara bersamaan digolongkan argumentasi tidak formal karena konjektur utama dibuktikan hanya berdasarkan contoh kasus.

Rebuttal muncul ketika siswa dengan pembuktian berdasarkan contoh menyadari bahwa perhitungan untuk suatu contoh kasus belum tentu berlaku untuk semua kasus pada domain konjektur. Siswa akan memunculkan *qualifier* 'belum tentu' sebagai penanda bahwa masih terdapat kemungkinan adanya *rebuttal*. Sementara siswa dengan pembuktian berdasarkan contoh yang tidak memunculkan *rebuttal* adalah siswa yang memunculkan *qualifier* 'pasti'. Siswa-siswa tersebut terlalu mempercayai bahwa hasil yang didapatkan pada suatu contoh kasus akan berlaku untuk semua kasus. Ketergantungan berlebihan terhadap contoh menjadi salah satu faktor penghambat dalam pembuktian(Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2017). Peluasan pembuktian terbentuk ketika subjek mencoba untuk menyanggah kebenaran konjektur dengan membuat konjektur baru.

Melihat dari struktur argumentasi yang dihasilkan, siswa yang menghasilkan bukti berdasarkan contoh cenderung memiliki struktur argumentasi yang lebih rumit dibandingkan siswa yang menghasilkan bukti formal. Hal ini disebabkan oleh munculnya sub argumen karena *warrant* yang digunakan perlu dibuktikan (Conner et al., 2014). Knipping & Reid (2016) menyebut sub argumen tersebut sebegai *local argument*. Pada bukti formal, *warrant* yang digunakan merupakan aturan yang telah ditetapkan dan tidak memerlukan bukti lebih lanjut. Kerumitan struktur argumentasi juga dipengaruhi oleh adanya perluasan pembuktian akibat munculnya konjektur baru. Contoh yang digunakan pada akhirnya akan menjadi *rebuttal* yang menentang *claim* pada konjektur baru. *Rebuttal* yang muncul pada struktur argumentasi pada pembuktian berdasarkan contoh menyebabkan pembuktian berdasarkan contoh memuat jenis komponen argumentasi yang lebih banyak daripada argumentasi yang dihasilkan pada pembuktian formal. Namun, validitas argumentasi pada pembuktian formal lebih kuat dibanding dengan argumentasi pada pembuktian berdasarkan contoh. Temuan tersebut bertentangan dengan pernyataan (Clark et al., 2007) bahwa argumen yang lebih kuat berisi lebih banyak komponen yang berbeda daripada argumen yang lebih lemah.

Simpulan

Struktur argumentasi pada siswa dengan pembuktian generik dan empirik hampir sama. Perbedaan hanya pada bagaimana contoh digunakan dalam menghasilkan *warrant.* Perbedaan paling mencolok pada struktur argumentasi yang dihasilkan oleh siswa dalam melakukan pembuktian dengan contoh adalah kemunculan *rebuttal* dan adanya perluasan pembuktian. Struktur argumentasi pada siswa yang menghasilkan bukti berdasarkan contoh lebih rumit dibandingkan siswa yang menghasilkan bukti formal. Hal ini diakibatkan oleh adanya sub argumen pada argumentasi siswa yang menghasilkan bukti. Pada bukti formal, *warrant* yang digunakan merupakan aturan yang telah ditetapkan dan tidak memerlukan bukti lebih lanjut. Validitas argumentasi pada pembuktian formal lebih kuat dibanding dengan argumentasi pada pembuktian berdasarkan contoh.

Daftar Rujukan

Aberdein, A. (2012). The parallel structure of mathematical reasoning. In *The argument of mathematics* (pp. 351–370). citeulike-article-id:12227960%5Cnhttp://www.worldcat.org/oclc/818963739

Alcock, L., & Weber, K. (2010). *Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course*. *1711553*, 93–114. https://doi.org/10.1090/cbmath/016/04

Aricha-Metzer, I., & Zaslavsky, O. (2017). The nature of students' productive and nonproductive example-use for proving. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 304–322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Ayalon, M., & Even, R. (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 235–247. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9136-2

Chartrand, G., Polimeni, A. D., & Zhang, P. (2018). *Mathematical proofs : a transition to advanced mathematics*.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 359–387.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction*, *17*(1), 55–66. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.009

Clark, D. B., Sampson, V., Weinberger, A., & Erkens, G. (2007). Analytic frameworks for assessing dialogic argumentation in online learning environments. *Educational Psychology Review*, *19*(3), 343–374. https://doi.org/10.1007/s10648-007-9050-7

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in Mathematics. *Pythagoras*, *24*(November 1990), 17–23.

Erduran, S., Simon, S., & Osborne, J. (2004). TAPping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's Argument Pattern for studying science discourse. *Science Education*, *88*(6), 915–933. https://doi.org/10.1002/sce.20012

Hakyolu, H., & Ogan-Bekiroglu, F. (2016). Interplay between content knowledge and scientific argumentation. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(12), 3005–3033. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.02319a

Hales, T. (2008). Formal proof. *Notices of the AMS*, *55*(11), 1370–1380.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396–428. https://doi.org/10.2307/749651

Indrawati, K. A. D., & Febrilia, B. R. A. (2019). Pola Argumentasi Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (Spltv). *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, *5*(2), 141. https://doi.org/10.24853/fbc.5.2.141-154

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Knipping, C. (2004). Argumentation structures in classroom proving situations. *European Research in Mathematics Education III*, 1–9.

Knipping, Christine, & Reid, D. A. (2016). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 3–32).

Kosko, K. W., & Zimmerman, B. S. (2019). Emergence of argument in children's mathematical writing. *Journal of Early Childhood Literacy*, *19*(1), 82–106.

https://doi.org/10.1177/1468798417712065

Laamena, C. M., Nusantara, T., Irawan, E. B., & Muksar, M. (2018). How do the Undergraduate Students Use an Example in Mathematical Proof Construction: A Study based on Argumentation and Proving Activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 185–198. https://doi.org/10.12973/iejme/3836

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 24–30. https://doi.org/10.1515/9781400865307-017

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing The General in The Particular. *Educational Studies in Mathematics*, *2*(231–250).

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 106–118. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.001

Muhtadi, D., Sukirwan, Hermanto, R., Warsito, & Sunendar, A. (2020). How do students promote mathematical argumentation through guide-redirecting warrant construction? *Journal of Physics: Conference Series*, *1613*(1), 1–8. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1613/1/012031

Pedemonte, B. (2001). Some Cognitive Aspects of the Relationship between Argumentation and Proof in Mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education PME-25* (pp. 33–40).

Pedemonte, Bettina. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Rø, K., & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *58*(December 2019), 100755. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100755

Siswono, T. Y. E., Hartono, S., & Kohar, A. W. (2020). Deductive or inductive? prospective teachers' preference of proof method on an intermediate proof task. *Journal on Mathematics Education*, *11*(3), 417–438. https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11846.417-438

Tall, D., & Mejia-Ramos, J. P. (2010). The long-term cognitive development of reasoning and proof. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, *due*, 137–149. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_10

Tchonang, P., Njomgang, Y. J., Tieudjo, D., & Pedemonte, B. (2019). Relationship between drawing and figures on students ' argumentation and proof. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, *15*(2), 75–91. https://doi.org/10.4314/ajesms.v15ii2.9

Uğurel, I., Morah, S., Koyunkaya, M. Y., & Karahan, O. (2016). Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Behavior in the Proving Process. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology*, *12*(2), 203–231.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Erlbaum.

Yopp, D. A., & Ely, R. (2016). When does an argument use a generic example? *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 37–53. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9633-z

Yopp, D. A., Ely, R., & Johnson-Leung, J. (2015). Generic example proving criteria for all. *For the Learning of Mathematics*, *35*(3), 8–13.