

## Desain dan Analisa Kontrol Optimal Pada Sistem *Non Linear Reaction Wheel Pendulum*.

Erlillah Rizqi Kusuma Pradani

Universitas Islam Raden Rahmat Malang

erlillahrpk@gmail.com

**Abstract.** Pada penelitian ini mendiskusikan tentang kontrol sistem sebuah *reaction wheel pendulum*. *Reaction wheel pendulum* adalah sebuah contoh implementasi dari sistem non linear dan sistem *underactuated*. *Reaction wheel pendulum* juga merupakan contoh ideal untuk mempelajari sistem kontrol. Sehingga hasil dari penelitian ini dapat dimanfaatkan untuk keperluan laboratorium di pendidikan perguruan tinggi khususnya pada bidang sistem kontrol. *Reaction wheel pendulum* adalah sebuah pendulum yang sederhana dengan *rotating disk*. *Rotating disk* ini menempel pada poros motor dc dan torsi kopling antara *rotation disk* dan pendulum dapat digunakan mengontrol gerak system. Pada artikel ini, model matematika dari bentuk state – space juga didiskusikan. Algoritma kontrol LQR yang digunakan juga dijelaskan secara singkat. Simulasi yang digunakan dengan menggunakan MATLAB juga dilakukan untuk membuktikan kinerja dari sistem kontrol yang digunakan. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa system *Reaction Wheel Pendulum* dapat stabil dengan menggunakan nilai [-534.5587 - 111.3672 -10.000 -4.4596].

**Kata Kunci :** Reaction wheel pendulum, *state – space*, kontrol LQR

### 1. Pendahuluan

Sistem mekanik *underactuated* terkenal digunakan untuk menyajikan karakteristik – karakteristik yang menarik untuk mencoba sistem linear, non – linear dan algoritma kontrol *intelligent*, karena sistem semacam ini merupakan tantangan yang menarik dari sudut pandang teori kontrol dan rekayasa [1]. Pendulum hadir di mana-mana di sekitar kita, diterjemahkan dalam berbagai bentuk. Untuk memberikan definisi, pendulum hanyalah objek yang berayun bebas relatif terhadap posisi keseimbangannya [2]. Sebuah sistem Pendulum telah menjadi platform demonstrasi populer untuk nonlinear dan underactuated kontrol setidaknya sekitar lima puluh tahun [3]. Ada beberapa percobaan kontrol yang dilakukan dalam sistem pendulum yang berbeda atau sistem penyeimbangan. Pada waktu akhir ini menggunakan kontrol optimal memberikan kemungkinan sebagai solusi yang terbaik untuk proses kontrol yang aplikasikan [5].

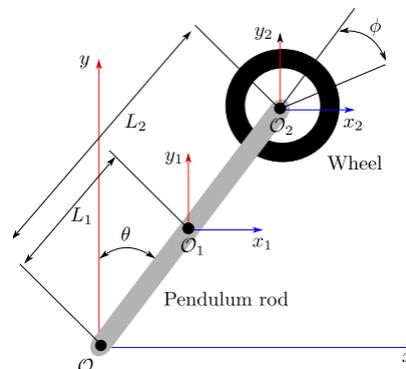
Salah satu betuk pendulum adalah *reaction wheel pendulum*. *Reaction wheel pendulum* adalah sebuah pendulum sederhana dengan *rotating disk* yang menempel pada poros motor dc dan torsi kopling antara *rotating disk* dan pendulum dapat digunakan untuk mengontrol gerak sistem. [6]. *Reaction Wheel*

*Pendulum* adalah salah satu bentuk modifikasi pendulum yang paling terbaru. *Reaction wheel pendulum* merupakan sebuah sistem mekanis yang terdiri dari pendulum fisik dengan *rotating disk*. Sistem ini memiliki beberapa fitur menarik baik dari sudut pandang dalam bidang mengajar dan dari sudut pandang penelitian. Dari sudut pandang bidang mengajar, dinamika dari *reaction wheel pendulum* yang paling sederhana di antara berbagai eksperimen pendulum yang tersedia sehingga sistem dapat diperkenalkan kepada mahasiswa di awal pendidikan mereka. [7]

## 2. Pemodelan Sistem

### 2.1 Persamaan Lagrange

Mewakili persamaan gerakan dinamis pada sistem yang kompleks dengan menggunakan persamaan Lagrange.



**Gambar 1.** Momen Inersia pada Reaction Wheel Pendulum

Energi kinetik adalah energi yang berasal dari gerakan relatif terhadap pusat massa dan energi rotasi kinetik tentang pusat massa. Jadi total energi kinetik pada system ini adalah

$$K = \frac{1}{2} (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 \quad (2.1)$$

Energy potensial pada system *Reaction Wheel Pendulum* diperoleh sebagai berikut

$$P = (m_1 L_1 + m_2 L_2) g \cos \theta \quad (2.2)$$

Pada persamaan dibawah ini fungsi lagrange dilambangkan dengan huruf  $L$ , fungsi  $K$  adalah energy kinetik sedangkan untuk energy potensial dilambangkan dengan fungsi  $P$ . Dimana fungsi energi kinetik dalam hal koordinat umum adalah  $q$  dan derivatif adalah  $\dot{q}$ . Fungsi Lagrange dinyatakan sebagai

$$L = K - P \quad (2.3)$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1 + I_2) \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 - (m_1 L_1 + m_2 L_2) g \cos \theta \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.4) kita dapat menghitung persamaan *Euler – Lagrange* dari pergerakan, dengan menggunakan rumus

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

Dimana,

$$q = [q_1, q_2]^T = [\theta_1, \theta_2]^T \quad (2.6)$$

Perlu dicatat bahwa torsi motor  $Tr$  yang dihasilkan adalah dari perputaran *wheel* pada batang pendulum pada arah yang berlawanan. Sehingga, persamaan Euler – Lagrange seperti dibawah ini

$$(m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1 + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\phi} - (m_1 L_1 + m_2 L_2) g \cos \theta = 0 \quad (2.7)$$

$$I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\phi}) = Tr \quad (2.8)$$

## 2.2 Representasi State Space

Sebuah sistem *reaction wheel pendulum* dapat diwakili dalam bentuk state – space,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.9)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.10)$$

Dari persamaan Euler – Lagrangian kita dapat mengetahui system tersebut dapat dikontrol (*controllable*) menjadi system yang linear dengan menggunakan matrik sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b/a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/a \\ 0 \\ (a + I_2)/(a - I_2) \end{bmatrix} Tr \quad (2.11)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dimana,  $a = m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 + I_1$  and  $= (m_1 L_1 + m_2 L_2) g$ .

**Table 1.** System Parameters

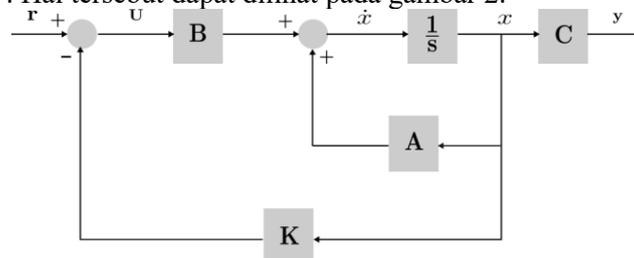
Parameter	Nilai
massa pendulum ( $m_1$ )	0.212 Kg
Massa <i>wheel</i> ( $m_2$ )	0.114 Kg
Panjang Pendulum ( $L_1$ )	0.50 m
Pusat Massa ( $L_2$ )	0.35 m
Gaya Gravitasi ( $g$ )	9.81 m/s <sup>2</sup>
Momen Inersia <i>Reaction wheel pendulum</i> ( $I_2$ )	0.0024 Kg.m <sup>2</sup>
Konstanta Torsi Motor ( $Kt$ )	487.10 <sup>-3</sup> Vs/rad
Konstanta <i>Motor back EMF</i> ( $Ke$ )	487.10 <sup>-3</sup> Vs/rad
Rasio roda gigi motor ( $N_g$ )	25 : 1

Dari memasukkan nilai-nilai dari parameter pada table 1, bentuk dari matrik state-space berubah menjadi seperti persamaan (2.13)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 23.6290 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -23.6290 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -18.3587 \\ 0 \\ 435.0254 \end{bmatrix} Tr \quad (2.13)$$

### 3. Metode LQR

Linear Quadratic Regulator (LQR) kontroler didasarkan pada prinsip umpan balik penuh dari bentuk state – space [9]. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar 2.



**Gambar 2.** Blok Diagram metode control LQR

Metode control *Linear Quadratic control* yang optimal bertujuan untuk mendapatkan sinyal *controlling*  $u(t)$  yang akan merubah keadaan sistem yang linear dari kondisi inisial  $x(t_0)$  menjadi kondisi akhir  $x(t)$  yang akan meminimalisir *cost function*, dinyatakan sebagai berikut

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2 R) dt \tag{3.1}$$

Pemilihan matrix  $Q$  dan  $R$  dilakukan dengan cara *trial and error*. Dimana matrix  $Q$  adalah matrix yang simetris, bernilai semidefinite positif ( $Q \geq 0$ ), sedangkan untuk matrix  $R$  bernilai positif dan *real* ( $R > 0$ ).

Dari gambar 3, denominator dapat dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut

$$D(s) = sI - (A - BK) \tag{3.2}$$

Dimana  $I$  adalah matriks identitas. Jadi, kestabilan dan karakteristik respon *transient* dari sistem *closed loop* ditentukan dari *eigenvalues* pada  $(A - BK)$ . Desainnya adalah untuk memilih *feedback gain*  $K$  sedemikian rupa sehingga *eigenvalues*  $(A - BK)$  menghasilkan nilai negative yang real [10]

### 4. Hasil dan Analisa

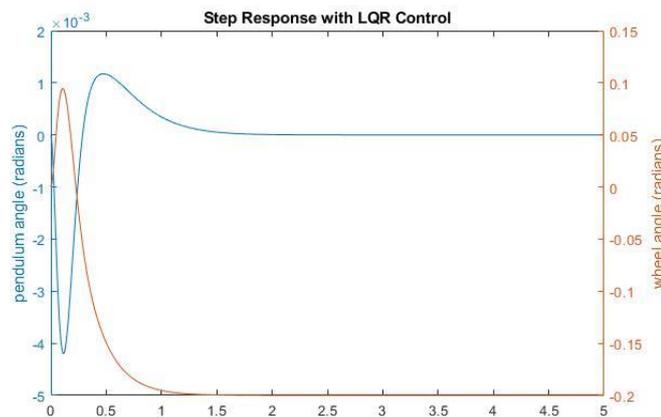
Percobaan simulasi telah dilakukan dengan menggunakan MATLAB. Hasil respon dari sistem akan ditunjukkan pada gambar 3 dan gambar 4.

Tabel 2. Parameter LQR	
Parameter	Pendulum
$Q$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$R$	1
$K$	[-65.2304 -13.6986

-1.000

-0.4883]

Dengan menggunakan nilai dari parameter yang tertera pada tabel 2, maka diperoleh respon sebagai berikut



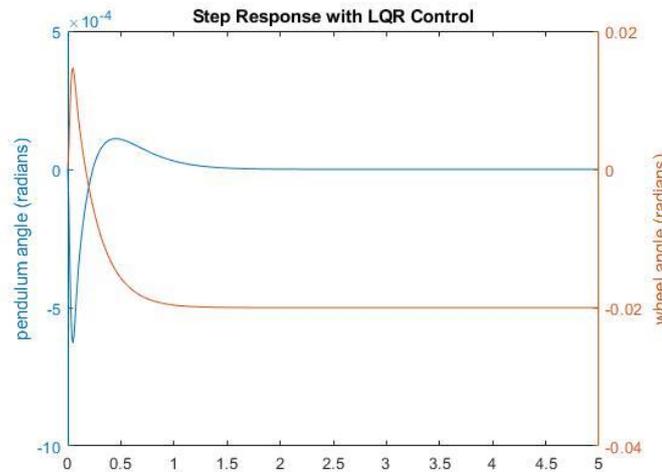
**Gambar 3.** Respons grafik dengan kontrol dengan *gain feedback* (K)

Dari gambar 3 grafik dengan garis kurva berwarna merah mewakili dari sudut *wheel* dalam radian, sedangkan, garis kurva berwarna biru mewakili sudut pendulum dalam radian. Seperti yang dapat dilihat, grafik yang dihasilkan tidak cukup memuaskan karena salah satu dari grafik tidak berada pada posisi 0 saat *steady – state* serta waktu yang dibutuhkan untuk stabil perlu dipercepat lagi. Jadi, dibutuhkan perubahan nilai *Q*.

**Tabel3.** Parameter LQR simullasi 2

Parameter	Pendulum
$Q$	$\begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$R$	1
$K$	$[-534.5587$ $-111.3672$ $-10.000$ $-4.4596]$

Dengan menggunakan nilai dari parameter yang tertera pada tabel 3, maka diperoleh



**Gambar 4.** Respons grafik dengan kontrol dengan *gain feedback* (K)

Pada gambar 4 menampilkan grafik respon sistem dengan menggunakan nilai  $Q$  yang lebih tinggi daripada sebelumnya. Dengan merubah nilai  $Q$  dapat membuat sistem menjadi lebih stabil.

## 5. Kesimpulan

*Reaction wheel Pendulum* adalah sebuah sistem yang non-linear dan sistem underactuation. System ini merupakan sistem yang tidak stabil dan dapat menuju kestabilan ketika dimodelkan menggunakan model matematika. Pada penelitian ini yang menggunakan metode control LQR menunjukkan metode control tersebut dapat bekerja secara optimal dengan menggunakan nilai *gain feedback* [-534.5587 - 111.3672 -10.000 -4.4596] untuk menstabilkan *reaction wheel pendulum* pada simulasi. Dari gambar grafik yang dihasilkan diketahui bahwa sistem dapat stabil dan menunjukkan pada posisi  $0^\circ$  atau pada posisi atas atau yang diinginkan.

## 6. Daftar Pustaka

- [1] J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar and S. Puga-Guzm'an, "On trajectory tracking control of the inertia wheel pendulum," 2014 International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Metz, 2014, pp. 572-577.
- [2] Elena Sorina Lupu, "Cubic Structure Capable of Balancing", Faculty of Electronics, Telecommunications and Information Technology. University POLITEHNICA of Bucharest, (2015).
- [3] O. Boubaker, "The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: A survey," *International Journal of Advanced Robotic System*, vol. 10, 2013.
- [4] Klaus Wittmann Wilfried Ley and Willi Hallmann, *Handbook of Space Technology*, (2009).
- [5] D. Tabak, "Applications of mathematical programming techniques in optimal control : A survey," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 15, no.6, pp. 688-690.
- [6] Daniel J. Block; Karl J. Astrom; MarkW. Spong, "The Reaction Wheel Pendulum," in *The Reaction Wheel Pendulum 2007*, keywords: feedback control ; inverted pendulum; modeling; dynamics; nonlinear control; stabilization; friction compensation; quantization; hybrid control,
- [7] Astrom, K.J., and Furuta, K., "Swinging up a pendulum by energy control", *Automatica*, vol.36, pp. 278-285, 2000.
- [8] M. Muehlebach and R. D'Andrea, "Nonlinear Analysis and Control of a Reaction-Wheel-Based 3-D Inverted Pendulum," in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, no. 1, pp.235-246, Jan. 2017. doi: 10.1109/TCST.2016.2549266

- [9] Indrazno Siradjuddin "State space control using LQR method for a cart-inverted pendulum linearised model", in International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering IJMME-IJENS Vol:17 No:01, Feb. 2017
- [10] P. Ignaciuk , "Linear – quadratic optimal control of periodic – review perishable inventory systems," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol.20, no.5, pp. 1400 – 1407, Sept 2012.