SIFAT-SIFAT SEMIRING DAN KONSTRUKSINYA

Ana Rahmawati
Universitas Pesantren Tinggi Darul 'Ulum (Unipdu) Jombang
Kompleks Ponpes Darul 'Ulum Rejoso Peterongan – Jombang Jatim 61481
rahmawatiana@gmail.com

ABSTRAK

Semiring didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian). Di bawah operasi penjumlahan semiring merupakan monoid komutatif, dan di bawah operasi perkalian merupakan semigrup, serta berlakunya sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan (distributif kiri dan kanan). Seperti sruktur ring, dalam semiring juga dikenal beberapa substruktur dan sifat-sifat serupa yang meliputi ideal; pembagi nol; invers; elemen identitas dan homomorfisme. Semiring dapat dikonstruksi dari hasil kali langsung semiring dengan operasi per-komponen dan latis distributif. Selanjutnya semiring yang dibangun dari aljabar Boole hingga dengan kardinalitas lebih dari dua merupakan semiring ketat, komutatif dengan kesatuan dan mempunyai pembagi nol. Pada bagian akhir, juga akan disajikan bahwa himpunan polinom dapat membentuk semiring polinom dengan operasi pada polinom.

Kata Kunci: semiring, hasil kali langsung semiring, latis distributif, aljabar Boole, semiring polinom atas semiring.

PENDAHULUAN

Dalam karya ilmiah ini, penulis akan membahas sifat-sifat semiring dan konstruksinya. Dari semiring yang telah didefinisikan, juga akan dibahas beberapa substruktur dan sifat-sifat yang serupa seperti struktur ring yang meliputi: ideal, pembagi nol, invers, elemen identitas dan homomorfisme. Semiring dapat dikonstruksi dari hasil kali langsung semiring dengan operasi per-komponen dan latis distributif. Semiring yang dibangun dari aljabar Boole hingga dengan kardinalitas lebih dari dua merupakan semiring ketat, komutatif dengan kesatuan dan mempunyai pembagi nol. Pada bagian akhir, juga akan disajikan bahwa himpunan polinom dapat membentuk semiring polinom dengan operasi pada polinom.

Kajian Teori

Definisi 2.1:

Himpunan dikatakan hingga *(finite set)* jika merupakan himpunan kosong atau mempunyai n anggota, dengan n bilangan bulat positif. Dan himpunan dikatakan tak hingga *(infinite set)* jika tidak merupakan himpunan hingga.

Definisi 2.2:

Misalkan C dan D adalah dua himpunan tak kosong. Maka hasil kali himpunan (*product set*) dari C ke D, yang dinotasikan dengan $C \times D$ adalah himpunan yang memuat semua pasangan terurut (c, d) dimana $c \in C$ dan $d \in D$, atau secara matematis dituliskan sebagai: $C \times D = \{(c,d) : c \in C, d \in D\}$. Konsep dari hasil kali himpunan ini dapat diperluas untuk sebanyak hingga dari himpunan dengan cara yang natural. Hasil kali himpunan-himpunan $C_1, C_2, ..., C_n$ dinotasikan dengan $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$ yaitu pasangan berurutan dari n tupel, di mana secara formal dituliskan sebagai berikut:

$C_1 \times C_2 \times ... \times C_n = \{(c_1, c_2, ..., c_n) : c_i \in C_i$ untuk setiap i dengan $1 \le i \le n\}$.

Definisi 2.3:

Misalkan $f : C \longrightarrow D$; fungsi dari himpunan C ke himpunan D.

1. f dikatakan **satu-satu** *(injektif)* jika dan hanya jika untuk setiap dua elemen berbeda di C, maka peta (bayangan) kedua elemen tersebut berbeda.
2. f dikatakan **pada** ***(****surjektif)* jika dan hanya jika setiap elemen di D merupakan peta (bayangan) suatu elemen di C.
3. f dikatakan berkorespondensi **satu-satu** ***(****bijektif)* jika dan hanya jika f satu-satu dan pada.

Definisi 2.4:
Himpunan tak kosong H dengan operasi biner $\circ$, disebut semigrup jika memenuhi:
(i). $a \circ b \in H, \forall a,b \in H$
(ii). $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a,b,c \in G$.
Semigrup H dengan operasi $\circ$ dinotasikan dengan $(H,\circ)$.

Definisi 2.5:
Semigrup $(H,\circ)$ yang memenuhi sifat $\exists\, e \in H \ni e \circ a = a \circ e = a, \forall a \in H$ disebut monoid. e merupakan elemen identitas.
Jika operasinya bersifat komutatif, maka disebut monoid komutatif.

Definisi 2.6:
Sebuah relasi R dari himpunan C ke himpunan D adalah subhimpunan tak kosong dari $C \times D$.

Definisi 2.7:
R disebut relasi urutan parsial pada himpunan tak kosong P jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:
Jika $a,b,c \in P$, maka:
1. aRa (sifat refleksif)
2. Jika aRb dan bRa maka $a = b$ (sifat antisimetri)
3. Jika aRb dan bRc maka aRc (sifat transitif).

Biasanya relasi pada himpunan terurut parsial (poset) dinotasikan dengan ”$\leq$” atau ”$\subseteq$”.
Hal ini berarti $a \leq b \Leftrightarrow (a,b) \in R$ atau $a \subseteq b \Leftrightarrow (a,b) \in R$ dan a dikatakan lebih kecil atau sama dengan b, atau b dikatakan lebih besar atau sama dengan a.
$(P,\leq)$ atau $(P,\subseteq)$ disebut himpunan terurut parsial (poset).

Definisi 2.8:
Himpunan terurut adalah himpunan yang diberi relasi urutan parsial.

Definisi 2.9:
Misalkan C himpunan terurut dengan relasi $\leq$ dan D subhimpunan dari C.
Kita katakan d elemen terbesar dari D, jika $d \in D$ dan $x \leq d$ untuk setiap $x \in D$.

Definisi 2.10:
Misalkan C himpunan terurut dengan relasi $\leq$ dan D subhimpunan dari C.
Kita katakan d elemen terkecil dari D, jika $d \in D$ dan $d \leq x$ untuk setiap $x \in D$.

Definisi 2.11:
D subhimpunan dari C dikatakan terbatas di atas jika ada sebuah elemen $c \in C$ sedemikian sehingga $x \leq c$, untuk setiap $x \in D$ dan c disebut batas atas dari D. Jika himpunan semua batas atas D mempunyai elemen terkecil, maka elemen tersebut disebut batas atas terkecil (supremum) dari D dan dinotasikan dengan sup (D), di mana bisa terjadi bahwa sup(D) bukan merupakan elemen dari D. Jika sup$(D) \in D$ maka merupakan elemen terbesar dari D.

Definisi 2.12:
D subhimpunan dari C dikatakan terbatas di bawah jika ada sebuah elemen $c \in C$ sedemikian sehingga $c \leq x$, untuk setiap $x \in D$ dan c disebut batas bawah dari D. Jika himpunan dari semua batas bawah D mempunyai elemen terbesar, maka elemen tersebut disebut batas bawah terbesar (infimum) dari D dan dinotasikan dengan inf (D), di mana bisa terjadi bahwa inf(D) bukan merupakan elemen dari D. Jika inf$(D) \in D$ maka merupakan elemen terkecil dari D.

Definisi 2.13:
Himpunan terurut parsial $(P,\leq)$ disebut himpunan terurut total atau rantai jika $a \leq b$ atau $b \leq a$ $,\forall a,b \in P.$

Definisi 2.14:
Misalkan $(P,\leq)$ himpunan terurut, dan $x \in P$. Misalkan $x\downarrow$ dinotasikan sebagai segmen bawah dari x, yaitu $\{y \in P \mid y \leq x\}$ dan $x\uparrow$ dinotasikan sebagai segmen atas x, yaitu $\{y \in P \mid x \leq y\}$.
Tinggi x didefinisikan sebagai banyak titik pada segmen bawah x; dengan kata lain, tinggi elemen x adalah banyak titik pada rantai terpanjang yang berakhir di x.

Definisi 2.15:
Poset $(L,\leq)$ disebut himpunan terurut latis jika $\sup(x,y)$ dan inf (x,y) ada, untuk setiap $x,y \in L.$
$\sup(x,y)$ artinya adalah $\sup\{x,y\}$ dan inf (x,y) adalah $\inf\{x,y\}$ untuk setiap $x,y \in L.$

Akibat 2.16:
1. Setiap himpunan terurut total adalah himpunan terurut latis.
2. Pada himpunan terurut latis $(L,\leq)$ pernyataan-pernyataan berikut ekivalen untuk semua x dan y di L,
   a. $x \leq y$
   b. $\sup(x,y) = y$
   c. $\inf(x,y) = x.$

Definisi 2.17:
Latis aljabar $(L,\cap,\cup)$ adalah himpunan tak kosong L dengan dua operasi biner $\cup$ (gabungan) dan $\cap$ (irisan) yang memenuhi syarat-syarat sebagai berikut untuk semua $x,y,z \in L$, berlaku:

L_1. $x \cup y = y \cup x$,
$x \cap y = y \cap x,$

L_2. $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$,
$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z,$

L_3. $x \cup (x \cap y) = x$
$x \cap (x \cup y) = x,$

L_4. $x \cup x = x$,
$x \cap x = x.$

Teorema 2.18:
Misalkan $(L,\leq)$ himpunan terurut latis. Jika $x \cap y = \inf(x,y)$ dan $x \cup y = \sup(x,y)$ maka $(L,\cap,\cup)$ adalah latis aljabar.

Teorema 2.19:
Misalkan $(L,\cap,\cup)$ latis aljabar. Definisikan $x \leq y$, jika $x \cap y = x$ (atau $x \cup y = y$). Maka $(L,\leq)$ himpunan terurut latis.

Definisi 2.20:
L disebut latis rantai jika relasi "$\leq$" urutan total pada L dan $(L,\leq)$ himpunan terurut latis.
Pada latis rantai L berlaku untuk setiap $a,b \in L$ maka kita punya $a \leq b$ atau $b \leq a.$

Definisi 2.21:
Misalkan L dan M dua latis. Pemetaan $f: L \longrightarrow M$ disebut homomorfisme urutan, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ untuk semua $x,y \in L.$

Definisi 2.22:
Misalkan L dan M dua latis. Pemetaan $f: L \longrightarrow M$ disebut isomorfisme urutan jika: f homomorfisme urutan, f injektif dan f surjektif.

Definisi 2.23:
Latis L dikatakan distributif jika untuk semua $x,y,z \in L$ berlaku $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ atau $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

Definisi 2.24:
Latis L dengan elemen terkecil 0 dan elemen terbesar 1 disebut berkomplemen jika untuk setiap $x \in L$ ada paling sedikit satu elemen y sedemikian sehingga $x \cap y = 0$ dan $x \cup y = 1$, y disebut komplemen $x.$

Akibat 2.25:
Jika L latis distributif, maka untuk setiap $x \in L$ mempunyai paling banyak 1 komplemen yang dinotasikan dengan x'.

Definisi 2.26:
Aljabar Boole adalah latis terurut dengan elemen terbesar 1 dan elemen terkecil 0 yang bersifat distributif dan berkomplemen.

Pembahasan

Definisi 3.1:
Himpunan tak kosong S dengan dua operasi biner "+" dan "$\circ$" (penjumlahan dan perkalian), disebut semiring jika memenuhi beberapa aksioma berikut:

1. $(S,+)$ merupakan monoid komutatif.
2. $(S,\circ)$ merupakan semigrup.
3. Operasi perkalian distributif terhadap operasi penjumlahan, yaitu:
$(a+b)\circ c = (a\circ c)+(b\circ c)$
$a\circ(b+c) = (a\circ b)+(a\circ c)$,
$\forall a,b,c \in S.$

Semiring S dengan operasi pertama "+", dan operasi kedua "$\circ$" dilambangkan dengan ($S,+,\circ$).

Definisi 3.2:
Semiring $(S,+,\circ)$ merupakan semiring komutatif jika semigrup $(S,\circ)$ adalah semigrup komutatif. Jika semigrup $(S,\circ)$ tidak komutatif, maka $(S,+,\circ)$ disebut semiring non komutatif.

Definisi 3.3:
Diberikan semiring $(S,+,\circ)$. Jika semigrup $(S,\circ)$ merupakan monoid, maka semiring ($S,+,\circ$) merupakan semiring dengan elemen identitas.

Definisi 3.4:
Misalkan $(S,+,\circ)$ adalah semiring. Jika ada $m \in N$ sedemikian hingga $ms = 0,$ artinya $s+s+...+s$ (sebanyak $m) = 0$, $\forall s \in S$, maka kita mengatakan bahwa semiring ($S,+,\circ$) berkarakteristik $m.$ Pada kasus S berkarakteristik m, kita tulis kar $S = m.$ Jika tidak ada m yang demikian, maka semiring $(S,+,\circ)$ berkarakteristik nol dan kita tulis kar $S = 0.$

Definisi 3.5:
Misalkan S_1 dan S_2 dua semiring. Semiring $S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1; s_2 \in S_2\}$ merupakan hasil kali langsung S_1 dan S_2 dengan operasi per-komponen.
Demikian juga
$S_1 \times S_2 \times S_3 \times ... \times S_n =$
$\{(s_1, s_2, s_3, ...s_n) / s_i \in S_1; i = 1,2,3,...,n\}$
juga merupakan semiring dengan operasi yang serupa dengan $S_1 \times S_2$.

Definisi 3.6:
Misalkan $(S,+,\circ)$ semiring. $P \neq \phi$, $P \subseteq S.$ P disebut subsemiring dari S jika P di bawah operasi yang sama dengan operasi di S membentuk semiring.

Definisi 3.7:
Misalkan S semiring. $I \neq \phi, I \subseteq S.$ I disebut ideal kanan (kiri) di S jika :
1. I merupakan subsemiring.
2. $i \circ s \in I (s \circ i \in I)$; untuk semua $i \in I$ $dan\ \ s \in S.$

Definisi 3.8:
Misalkan $(S,+,\circ)$ semiring. $I \neq \phi, I \subseteq S$. I dikatakan ideal di S jika I merupakan ideal kanan dan ideal kiri di $S.$

Definisi 3.9:
Misalkan $(S,+,\circ)$ adalah semiring. $x \in S - \{0\}$ disebut pembagi nol di S jika ada $y \in S, y \neq 0 \ni x \circ y = 0$.

Definisi 3.10:
Misalkan $(S,+,\circ)$ semiring non komutatif dengan elemen identitas I . $x \in S$ dikatakan mempunyai elemen identitas kanan (kiri) jika ada $y \in S \ni x \circ y = I\ (y \circ x = I)$.

Definisi 3. 11:
Misalkan $(S,+,\circ)$ adalah semiring. $x \in S$ disebut idempoten jika $x \circ x = x^2 = x.$

Definisi 3.12:
Misalkan S dan S' dua semiring. Pemetaan $\varphi : S \to S'$ disebut homomorfisme semiring jika $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ dan $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b),$ untuk semua $a, b \in S.$

Definisi 3.13:
Misalkan $(S, +, \circ)$ semiring. S disebut semiring ketat *(strict)*, jika $a + b = 0$ mengakibatkan $a = 0$ dan $b = 0.$

Definisi 3.14:
Misalkan $(S, +, \circ)$ semiring dengan identitas I. $x \in S$ dikatakan *invertible* atau mempunyai invers jika ada $y \in S \ni x \circ y = y \circ x = I.$

Teorema 3.15 :
Misalkan $(L, \cup, \cap)$ latis distributif dengan elemen terkecil 0, maka $(L, \cup, \cap)$ adalah semiring.

Bukti:
Diketahui : $(L, \cup, \cap)$ adalah latis distributif.
Akan ditunjukkan $(L, \cup, \cap)$ merupakan semiring.

1. $(L, \cup)$ merupakan monoid komutatif.
   i. Dari definisi latis, jelas bahwa L tertutup di bawah operasi $(\cup)$.
   ii. Operasi $(\cup)$ asosiatif di L.
   iii. Operasi $(\cup)$ komutatif di L.
   iv. 0 merupakan elemen identitas L di bawah operasi $(\cup)$.

   Dari (i) - (iv), maka $(L, \cup)$ merupakan komutatif monoid.
2. $(L, \cap)$ merupakan semigrup.
   i. Dari definisi latis, jelas bahwa L tertutup di bawah operasi $(\cap)$.
   ii. Operasi $(\cap)$ asosiatif di L.

   Dari (i) dan (ii) maka $(L, \cap)$ merupakan semigrup.
3. $(L, \cup, \cap)$ merupakan latis distributif (diketahui).

Berdasarkan (1)-(3),maka $(L, \cup, \cap)$ merupakan semiring.

Akibat 3.16:
Hasil kali langsung dari latis-latis distributif dengan elemen terkecil nol adalah semiring.

Bukti:
Berdasarkan Definisi 3.10 hasil kali langsung semiring adalah semiring. Karena latis distributif dengan elemen terkecil nol adalah semiring (Teorema 3.25), maka hasil kali langsung latis-latis distributif adalah semiring.

Akibat 3.17:
Semua latis rantai adalah semiring.

Bukti:
Dari penjelasan sebelumnya setiap latis rantai, distributif. Berdasarkan Teorema 3.15, maka semua latis rantai merupakan semiring.

Akibat 3.18:
Setiap aljabar Boole merupakan semiring.

Bukti:
Karena setiap aljabar Boole distributif, berdasarkan Teorema 3.25 maka setiap aljabar Boole merupakan semiring.

Teorema 3.19:
Semiring yang merupakan latis distributif berkarakteristik nol.

Bukti:
Ada elemen L, katakan $a \neq 0$ yang bersifat $na = a \neq 0, \forall n \in N.$

Definisi 3.20:
Misalkan L latis dengan elemen nol. $a \in L$ disebut atom jika untuk semua $b \in L,$ $0 < b \leq a \Rightarrow b = a.$

Akibat 3.21:
Misalkan B aljabar Boole hingga dan misalkan A himpunan semua atom $B.$ Maka B isomorfik dengan $P(A),$ himpunan kuasa A. Dengan kata lain, $(B, \cup, \cap) \cong (P(A), \cup, \cap).$

Bukti:
Karena B aljabar Boole hingga, tinggi setiap atom di aljabar Boole 2. Berarti jika a atom, maka a bukan elemen terbawah. Dapat dibuktikan bahwa setiap elemen tak nol di B merupakan gabungan atom-atom di

bawahnya. Dengan kata lain, $x \in B$ dan $x \neq 0,$ maka $x = \bigcup\{a \in B / a \leq x \,\&\, a$ adalah atom}

Karena B himpunan hingga, maka gabungan himpunan hingga selalu ada.

Misalkan $y = \{a \in B \mid a \leq x$ dan a atom}

Dan Misalkan $z = x \cap y'$

Jelaslah bahwa $y \leq x$ sebab y merupakan gabungan elemen-elemen $\leq x$.

Andaikan $z \neq 0$. Maka tinggi z sekurang-kurangnya 2. Tetapi, di bawah z ada paling sedikit 1 elemen katakan b, yang tingginya 2. Dengan kata lain, ada atom $b \ni b \leq z.$

Karena $b \leq z,$ maka kita punya:

$$b \cap y \leq z \cap y \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} z \cap y &= (x \cap y') \cap y \\ &= x \cap (y \cap y') \\ &= x \cap 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena itu, $b \cap y = 0.$

Jika n menyatakan banyak atom $\leq x$ dan a_i atom- atom berbeda $\leq x$, $i < n$ maka $y = a_0 \cup a_1 \cup ... \cup a_{n-1}$

danjuga

$$\begin{aligned} 0 = b \cap y &= b \cap (a_0 \cup a_i \cup ... \cup a_{n-1}) \\ &= (b \cap a_0) \cup (b \cap a_1) \cup ... \cup (b \cap a_{n-1}) \end{aligned}$$

Jadi $b \cap a_i \leq 0$ dan akibatnya $b \cap a_i = 0$ $, \forall i < n$. Tetapi ini berarti bahwa atom b berbeda dari setiap atom a_i. Sebab, jika $b = a_i$, maka $b \cap a_i = b \neq 0.$ Karena $x \geq z$ dan $z \geq b$ maka $b \leq x$ dan kita dapat menyimpulkan bahwa b adalah salah satu atom diantara atom a_i. Ini kontradiksi, sehingga $z = 0$. Karena $z = 0$, maka

$$\begin{aligned} x = x \cap 1 &= x \cap (y \cup y') \\ &= (x \cap y) \cup (x \cap y') \\ &= (x \cap y) \cup 0 \\ &= x \cap y \end{aligned}$$

Jadi $x \leq y.$

Karena $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y.$

Definisikan fungsi $f : B \to P(A)$, dengan $f(u) : \{a \in B \mid a \leq u$ dan a atom} untuk semua $u \in B.$

Misalkan $u\ , v \in B$ dan $u \leq v$.

1. Jika a atom dan $a \leq u$, maka $a \leq v$ sebab $u \leq v$. Ini berarti $f(u) \subseteq f(v)$

Jadi, f adalah fungsi yang homomorfisme urutan.

2. Ambil sebarang $u, v \in B$ dengan $f(u) = f(v)$. Maka $f(u) = \{a \in A \mid a \leq u)$, dan $f(v) = \{a \in A \mid a \leq v\}$

Berdasarkan hasil sebelumnya, $u = v$ sebab kedua-duanya merupakan gabungan atom-atom di $f(u) = f(v).$

Jadi f injektif.

3. Ambil sebarang $X \in P(A)$.

Tetapkan $x = \bigcup X$.

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = X$. Jelaslah $X \subset f(x)$, sebab setiap $a \in X$ dan a atom, pastilah $\leq x$.Sebaliknya, ambil sebarang atom a di bawah $x.$ Akan ditunjukkan $a \in X$.

Misalkan $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dan andaikan $a \notin X$. Maka $x = a \cup x$ dan $a \cap x_i = 0$. Karena $a = a \cap x$, kita mempunyai relasi

$$\begin{aligned} a &= a \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup ... \cup x_n) \\ &= (a \cap x_1) \cup (a \cap x_2) \cup (a \cap x_3) \cup ... \cup (a \cap x_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi $a = 0$; suatu kontradiksi sebab a atom di $B.$

Jadi, setiap atom di bawah x pasti elemen di X ; berarti, $f(x) \subset X$

Karena $X \subset f(x)$ dan $f(x) \subset X$, maka kita dapat menyimpulkan $f(x) = X$. Jadi, f surjektif.

Dari (1) – (3), maka f isomorfisme urutan.

Jadi terbukti bahwa B isomorfik dengan $P(A)$, yaitu $(B,\cup,\cap)\cong(P(A),\cup,\cap)$.

Teorema 3.22:

Aljabar Boole hingga dengan $|B|>2$, atau hasil kali langsung sejumlah hingga aljabar Boole hingga merupakan semiring ketat, komutatif dengan kesatuan dan mempunyai pembagi nol.

Bukti:

Telah kita buktikan bahwa setiap aljabar Boole adalah semiring. Untuk membuktikan bagian pertama teorema ini, cukup ditunjukkan keketatan, kekomutatifan, dan adanya elemen identitas serta pembagi nol. Ambil sebarang $a,b\in B$ dengan $a\cup b=0$. Karena setiap elemen tak nol di aljabar Boole merupakan gabungan atom-atom di bawahnya, relasi ini mengakibatkan $a=0$ dan $b=0$. Jelas dari definisi operasi $\cup$ pada B bahwa operasi $\cup$ komutatif. 1 merupakan elemen identitas di bawah operasi $\cap$. Karena $|B|>2$, B memiliki paling sedikit dua atom, katakan a dan b. Pastilah $a\cap b=0$. Dengan kata lain, sekurang-kurangnya atom-atom inilah yang merupakan pembagi nol B. Hasil kali langsung sejumlah hingga semiring merupakan semiring. Telah kita buktikan setiap aljabar Boole merupakan semiring, berarti hasil kali langsung sejumlah hingga aljabar Boole juga merupakan semiring. Untuk membuktikan bagian kedua dari teorema ini, cukup ditunjukkan keketatannya, kekomutatifan, dan adanya elemen identitas serta pembagi nol.

Ambil sebarang

$$x=\{x_1,x_2,...,x_n\}\in B_1\times B_2\times...\times B_n$$

dan

$$y=\{y_1,y_2,...,y_n\}\in B_1\times B_2\times...\times B_n.$$

dengan $x\cup y=0$. Dari kesamaan dua n-tupel, kita mendapatkan:

$x_1\cup y_1=0, x_2\cup y_2=0,..., x_n\cup y_n=0.$

Karena aljabar Boole merupakan semiring ketat, maka $x_1=0,\ y_1=0$, $x_2=0,\ y_2=0$, ..., $x_n=0,\ y_n=0$, sehingga

$x=\{0_1,0_2,...0_n\}=0$ dan $y=\{0_1,0_2,...0_n\}=0.$ Jelas dari definisi operasi $\cup$ pada B bahwa operasi $\cup$ komutatif. $\{1_1,1_2,1_3,...,1_n\}$ merupakan elemen identitas di bawah operasi $\cap$. $|B_1|>2$, maka B_1 memiliki paling sedikit dua atom, katakan x_1 dan y_1. $x=\{x_1,0,...,0\}\in B_1\times B_2\times...\times B_n$ dan $y=\{y_1,0,...,0\}\in B_1\times B_2\times...\times B_n$.

Jelaslah $x\neq 0$ dan $y\neq 0$, tetapi

$$x\cap y=\{x_1\cap y_1,0\cap 0,...,0\cap 0\}$$
$$=\{0,0,...,0\}$$
$$=0.$$

Definisi 3.23:

Misalkan $(S,+,\circ)$ semiring komutatif dengan elemen identitas, dan misalkan x suatu simbol. Misalkan $S[x]$ semua simbol berbentuk $s_0+s_1x+...+s_nx^n$, dengan n bilangan bulat non negatif dengan koefisien-koefisien $s_0,s_1,...,s_n$ di S. Dua polinom $p(x)=a_0+a_1x+...+a_mx^m$ dan $q(x)=b_0+b_1x+...+b_nx^n$ di $S[x]$ dikatakan sama, ditulis $p(x)\equiv q(x)$ jika $a_i=b_i$; untuk setiap i. Kita mendefinisikan $p(x)+q(x)=c_0+c_i...+c_tx^t$, dengan $c_i=a_i+b_i$; untuk setiap i. Dan kita mendefinisikan $p(x)\times q(x)=d_0+d_1x+...+d_kx^k$ dengan $d_i=\sum_{t=0}^{i}a_tb_{i-t}$ untuk setiap $0\le i\le k$ dan $k=m+n$.

Teorema 3.24:

Himpunan polinom $S[x]$ dengan dua operasi biner ”+” dan ”×” (penjumlahan dan perkalian) membentuk semiring polinom komutatif.

Semiring polinom $S[x]$ dengan operasi pertama "+" dan operasi kedua "$\times$" dilambangkan ($S[x],+,\circ$).

Bukti:

Jelaslah dari definisi operasi penjumlahan dan perkalian yang ditentukan di atas $S[x]$ tertutup di bawah kedua operasi ini.

1. $(S[x],+)$ merupakan monoid komutatif.

i. Ambil sebarang $p(x), q(x), r(x) \in S[x]$

dengan $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$,

$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$,

dan

$r(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_s x^s$.

Kita mempunyai

$[p(x) + q(x)] + r(x)$

$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_t + b_t)x^t] + r(x)$

dengan $t = maks(m,n)$

$= [(a_0 + b_0) + c_0) + (a_1 + b_1) + c_1)x + ...$

$+ (a_u + b_u) + c_u)x^u]$ dengan $u = maks(t,s)$

. Karena operasi penjumlahan asosiatif di S , maka

$= [(a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + ... + (a_u + (b_u + c_u))x^u]$

$= p(x) + [q(x) + r(x)]$

Jadi operasi penjumlahan di $S[x]$ asosiatif.

ii. Ambil sebarang $p(x), q(x) \in S[x]$

dengan $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$

$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$

$p(x) + q(x) =$

$[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_t + b_t)x^t]$

$= [(b_0 + a_0) + (b_1 + c_1)x + ... + (b_t + c_t)x^t]$

; $t = maks(m,n)$

$= q(x) + p(x)$

Jadi operasi penjumlahan di $S[x]$ komutatif .

iii. Pilih $O(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$ $\in S[x]$. Maka

$(0 + a_0) + (0 + a_1)x + ... + (0 + a_n)x^n$

$= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

$= p(x)$, untuk setiap $p(x) \in S[x]$.

Dari (i) – (iii), kita mempunyai $S[x]$ merupakan monoid komutatif.

2. $S[x]$ merupakan semigrup.

i. Ambil sebarang $p(x), q(x), r(x) \in S[x]$

dengan $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$,

$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$,

dan $r(x) = c_0 + c_1 x + ... c_s x^s$.

Maka $(p(x) \times q(x) =$ $d_0 + d_1 x + ... + d_t x^t$

dengan $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$, $0 \le i \le t$ dan $t = m + n$

$[p(x) \times q(x)] \times r(x) =$

$(d_0 + d_1 x + ... + d_t x^t) \times$

$(c_0 + c_1 x + ... + c_s x^s)$

$= (e_0 + e_1 x + ... + e_u x^u)$

dengan $e_j = \sum_{l=0}^{j} d_l c_{j-l}$, $0 \le j \le u$ dan $u = s + t.$

Karena $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$, berarti $d_l = \sum_{w=0}^{l} a_w b_{l-w}$,

sehingga $e_j = \sum_{l=0}^{j} \sum_{w=0}^{l} a_w b_{l-w} c_{j-l}$

$= \sum_{l=0}^{j} \left(\sum_{w=0}^{l} a_w b_{l-w} \right) c_{j-l}$

dengan $0 \le l \le j$; $0 \le w \le l$

$$= \sum_{l=0}^{j} \left(\sum_{w=0}^{l} b_w c_{l-w} \right) a_{j-l}$$

dan $0 \le j \le u$

$$= p(x) \times [q(x) \times r(x)]$$

Dengan memeriksa bahwa setiap suku dalam ruas yang satu merupakan suku ruas yang lain, kita dapatkan operasi perkalian asosiatif. Jadi operasi perkalian asosiatif di $S[x]$.

iii. Ambil sebarang $p(x), q(x) \in S[x]$

dengan $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$,

dan $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$.

$$(p(x) \times q(x) = d_0 + d_1 x + ... + d_t x^t$$

dengan $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$

$$= \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} b_k$$

$$= q(x) \times p(x)$$

Jadi operasi perkalian di $S[x]$ komutatif.

Dari i - iii, kita mempunyai $S[x]$ merupakan semigrup komutatif.

3. Ambil sebarang $p(x), q(x), r(x) \in S[x]$

dengan $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$$

$$r(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_s x^s$$

$$(p(x) \times q(x)) + (p(x) \times r(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} + \sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} [a_k \times (b_{i-k} + c_{i-k})].$$

$$= (p(x) \times [q(x) + r(x)]$$

$$(p(x) \times r(x)) + (q(x) \times r(x)) =$$

$$\sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k} + \sum_{k=0}^{i} b_k c_{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} [(a_k + b_k) \times c_{i-k}]$$

$$= [(p(x) + (q(x)] \times r(x)$$

Operasi perkalian distributif terhadap operasi penjumlahan di $S[x]$.

Dari (1) – (3), kita menyimpulkan $S[x]$ merupakan semiring komutatif.

Teorema 3.25:

Jika S semiring ketat tanpa pembagi nol, maka demikian pula semiring polinom $S[x]$.

DAFTAR RUJUKAN

Juniati, Dwi. 2003. *Topologi*. Surabaya: UNESA University Press.

Kandasamy, W. B. Vasantha, 2002. *Smarandache Semirings, Semifields,and Semivector Spaces*. Journal American Research Press. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Vasantha-Book3.pdf

Kusrini, Sukahar. 2001, *Struktur Aljabar 1*, Usaha Jurusan Matematika: UNESA Surabaya.

Lidl, Rudolf dan Pilz, Gunter. *Applied Abstrak Algebra Second Edition*, Springer Verlag: Berlin. http://www.books.google.co.id/books?isbn=0387982906

Makkai, Michael. 2007, *Orders and Lattices*, Department of Mathematics: McGill University. http://www.math.mcgill.ca/makkai/MATH3182007/318073S1.pdf

Makkai. 2007, *Boolean Algebras and Propositional Logic*, Department of Mathematics: McGill University. http://www.math.mcgill.ca/makkai/MATH3182007/318074S1.pdf

Soebagio A, Suharti dan Sukirman .1993. *Materi Pokok Struktur Aljabar: Modul 1-12*. Jakarta: Penerbit Universitas Terbuki